Università degli studi di Trieste

Corso di Laurea magistrale a ciclo unico in Architettura
Istituzioni di Matematiche

1 Settembre 2015

Cognome: ....

Nome: ....

Matricola: ....

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Esercizio	**Punteggio**
1	/2
2	/4
3	/5
4	/4
5	/4
6	/11
7	/6
Totale	/36
Voto	

Esercizio 1 – 1+1 punti. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{2015}{n}}{e^{9/n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2015}{n}}{\frac{2015}{n}} \frac{2015}{n} \frac{9/n}{e^{9/n}-1} \frac{n}{9} = \frac{2015}{9};$$

$$\text{(b)} \lim_{n\to\infty} [\log(10en) - \log(1+e^2 n)] = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{10en}{1+e^2 n}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \frac{10en}{1+e^2 n}\right) = \log\frac{10}{e} = \log 10 - 1.$$

Esercizio 2 – 2+2 punti. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos e^x}{x^2-9} = 0 \ \text{(usando il teorema dei carabinieri)};$$

$$\text{(b)} \lim_{x\to\infty} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \infty.$$

Esercizio 3 – 4+1 punti. Calcolare i seguenti limiti applicando i teoremi di de L'Hôpital:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin(2x)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos(2x)}{\cos x} = 6;$$

$$\text{(b)} \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Esercizio 4 – 2+2 punti. Calcolare le seguenti derivate:

$$\text{(a)}\, D\left[\exp\{\tan(x^3+6)\}\right] = \exp\{\tan(x^3+6)\}\cdot\frac{3x^2}{\cos^2(x^3+6)};$$

$$\text{(b)}\, D\left[\sqrt{1-4x^2}\right] = \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Esercizio 5 – 2+2 punti. (a) Scrivere il polinomio di MacLaurin dell'ordine n e centrato nel punto x_0 indicati della seguente funzione.

$$f(x) = x\sin x, \qquad n = 3 \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Serve calcolare:

$$\begin{aligned} P_3^{ML}(x;x_0) :=& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 \\ =& f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

Ora si calcolano le derivate:

$$f'(x) = \sin x + x\cos x; \qquad f''(x) = 2\cos x - x\sin x; \qquad f'''(x) = -3\sin x - x\cos x.$$

Segue che

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}; \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \qquad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.$$

Infine,

$$P_3^{ML}\left(x;\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 = x - \frac{1}{2}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{\pi}{2}x^2 + \left(1-\frac{\pi^2}{8}\right)x.$$

(b) Che cosa di può dire del polinomio di Taylor ($x_0 = 0$) di ordine $n = 4$ della stessa funzione?
Serve calcolare:

$$\begin{aligned} P_4^T(x) :=& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(IV)}(0)}{24}x^4 \\ =& 0 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3 - \frac{1}{6}x^4 = x^2 - \frac{1}{6}x^4, \end{aligned}$$

dopo aver calcolato $f^{(IV)}(x) = -4\cos x + x\sin x$, e valutato la funzione e le sue derivate in zero: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$, $f^{(IV)}(0) = -4$.

La funzione $f(x) = x\sin x$ è pari, quindi il suo polinomio di Taylor contiene solo potenze pari (come si verifica facilmente).

Esercizio 6 – 11 punti. Studiare la funzione $y = f(x) = \log\sqrt{1-x^2}$, indicando:

(a – 5 punti) Dominio. Intersezioni con gli assi. Segno della funzione. Eventuali asintoti. Parità o disparità della funzione

(b – 5 punti) Derivata prima, suo dominio, suo segno. Eventuali punti di massimo o minimo. Sono relativi o assoluti? Derivata seconda, suo dominio, suo segno. Concavità o convessità della funzione.

(c – 1 punto) Disegnare un grafico accurato della funzione studiata.

Questa era una delle funzione dei fogli di esercizi...

Esercizio 7 – 2+2+2 punti. Calcolare i seguenti integrali:

$$\text{(a)} \int \frac{1}{3x^2+27}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{3}\frac{1}{1+(x/3)^2}dx = \frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c;$$

$$\text{(b)} \int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \tan x + \cot x + c;$$

$$\text{(c)} \int_0^\pi x^2\cos x dx = [x^2\sin x]_0^\pi - 2\int_0^\pi x\sin x dx = 0 - 2[-x\cos x]_0^\pi - 2\int_0^\pi \cos x dx = -2\pi.$$