Università degli studi di Trieste

Corso di Laurea magistrale a ciclo unico in Architettura
Istituzioni di Matematiche

23 Gennaio 2015

Cognome: ....

Nome: ....

Matricola: ....

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Esercizio	**Punteggio**
1	/3
2	/3
3	/2
4	/3
5	/3
6	/3
7	/7
8	/3
9	/3
Totale	/30
Voto	

Esercizio 1 – 1+1+1 punti. Vero o falso? Rispondere giustificando le risposte.

(a) Se la successione a_n è infinitesima, allora $\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$.
FALSO: $\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=1-\lim_{n\to\infty}a_n=1-0=1$.

(b) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è strettamente crescente, allora $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
FALSO: come esempio prendere la funzione $f:]0,+\infty[\to]-\infty,0[$ definita da $f(x)=-1/x$.

(c) Se $\lim_{x\to c}f(x)=\ell$, allora $f(c)=\ell$.
FALSO: basta prendere una funzione continua dappertutto nel suo dominio, meno che nel punto c, dove è definita da $f(c)=m$, con un qualunque $m\neq\ell$.

Esercizio 2 – 1+1+1 punti. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{e^{\sqrt{3}/n}-1}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right),\qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}[\log(8+n)-\log(en)],\qquad \text{(c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-2301(-1)^n}{n^2+2301\cos(n\pi)}.$$

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{e^{\sqrt{3}/n}-1}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{2/n}\frac{2}{n}\frac{\sqrt{3}/n}{e^{\sqrt{3}/n}-1}\frac{1}{\sqrt{3}/n}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}=1.$$

$$\text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}[\log(8+n)-\log(en)]=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{8+n}{en}\right)=\log\frac{1}{e}=-1.$$

$$\text{(c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-2301(-1)^n}{n^2+2301\cos(n\pi)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{2301(-1)^n}{n^2}\right)}{n^2\left(1+2301\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right)}=3.$$

Esercizio 3 – 1+1 punti. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}n^4\left(1-\sqrt{\cos\frac{2\pi}{n^2}}\right),\qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{2015}}\right)^{n^{2015}}.$$

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}n^4\left(1-\sqrt{\cos\frac{2\pi}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{\cos\frac{2\pi}{n^2}}}{\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{\cos\frac{2\pi}{n^2}}}{\frac{1}{n^4}}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos\frac{2\pi}{n^2}}}{1+\sqrt{\cos\frac{2\pi}{n^2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\pi^2\frac{1-\cos\frac{2\pi}{n^2}}{\frac{4\pi^2}{n^4}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos\frac{2\pi}{n^2}}}=4\pi^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pi^2.$$

$$\text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{2015}}\right)^{n^{2015}}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e,\quad \text{sostituendo } m:=n^{2015}.$$

Esercizio 4 – 1+1+1 punti. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)(1+\sin(e^x));\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to1}\frac{\sin((x-1)^2)}{x-1};\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}.$$

(a) con il teorema dei carabinieri. Il secondo fattore è limitato tra 0 e 2, perché $-1\le\sin(e^x)\le1$. Allora la funzione dentro il limite ha i seguenti controlli:

$$0\le\left(1-\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)(1+\sin(e^x))\le2\left(1-\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)\to0\quad\text{per } n\to\infty.\text{ Il limite fa 0.}$$

$$\text{(b)}\ \lim_{x\to1}\frac{\sin((x-1)^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin((x-1)^2)}{(x-1)^2}(x-1)=1\cdot0=0.$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0,$$ o come confronto della potenza di $f(x)=x$ e $g(x)=\log x$, o usando de L'Hôpital.

Esercizio 5 – 1+1+1 punti. Calcolare i seguenti limiti applicando i teoremi di de L'Hôpital, dopo aver classificato il tipo di forma indeterminata:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin(3x)};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to0}\frac{\log\cos x}{\sin2x};\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin2x}}.$$

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin(3x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}=\frac{2}{3}.$$

$$\text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{\sin 2x} = \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2\cos 2x}=0.$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin 2x}} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\sin 2x}\right\}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\sin 2x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}}{2\cos 2x}=-\frac{1}{4}.\quad \text{Allora il limite fa}\frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

Esercizio 6 – 1+1+1 punti. Calcolare le seguenti derivate:

$$\text{(a)}\ D\left[\frac{xe^x\arctan x}{\log^5 x}\right];\qquad \text{(b)}\ D\left[(\arctan x)^x\right];\qquad \text{(c)}\ D[x^{10}-3x^5+1].$$

$$\text{(a)}\ D\left[\frac{xe^x\arctan x}{\log^5 x}\right]=e^x\frac{(\arctan x+x\arctan x+\frac{x}{1+x^2})\log^5 x-5(\log^4 x)\arctan x)}{\log^{10}x}.$$

$$\text{(b)}\ D\left[(\arctan x)^x\right]=D[\exp\{x\log\arctan x\}]=(\arctan x)^x\left[\log\arctan x+\frac{x}{(1+x^2)\arctan x}\right].$$

$$\text{(c)}\ D[x^{10}-3x^5+1]=10x^9-15x^4.$$

Esercizio 7 – 7 punti. Studiare la funzione $y=f(x)=x\sqrt{1-x^2}$, indicando:

(a – 2 punti) Dominio. Intersezioni con gli assi. Segno della funzione. Discutere la parità o disparità della funzione.

(b – 2 punto) Derivata prima, suo dominio, suo segno. Come si comporta la derivata prima agli estremi del suo dominio? Eventuali punti di massimo o minimo. Sono relativi o assoluti? Derivata seconda, suo dominio, suo segno. Concavità o convessità della funzione.

(c – 2 punto) Calcolare l'area compresa tra in grafico di f e l'asse x e le rette $x=\pm\frac{1}{2}$ (la parità/disparità della funzione può aiutare...). Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando la funzione di un giro completo attorno all'asse x (la parità/disparità della funzione può aiutare...).

(d – 1 punto) Disegnare un grafico accurato della funzione studiata.

Esercizio 8 – 1+1+1 punti. Calcolare i seguenti integrali:

$$\text{(a)}\ \int\frac{6x-7}{3x^2-7x+11}dx;\qquad \text{(b)}\ \int e^x\sin x dx;\qquad \text{(c)}\ \int\frac{x+\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

$$\text{(a)}\ \int\frac{6x-7}{3x^2-7x+11}dx=\log|3x^2-7x+11|+c.$$

$$\text{(b)}\ \int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx,\quad \text{da cui}$$

$$\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c.$$

$$\text{(c)}\ \int\frac{x+\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\arcsin x+c.$$

Esercizio 9 – 1+1+1 punti. Calcolare i seguenti integrali:

$$\text{(a)}\ \int_0^{\pi/2}x\sin x dx;\qquad \text{(b)}\ \int_0^1 xe^x dx;\qquad \text{(c)}\ \int_0^{\pi/4}\tan x dx.$$

$$\text{(a)}\ \int_0^{\pi/2}x\sin x dx=[-x\cos x]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x dx=-\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+0\cdot\cos 0+[\sin x]_0^{\pi/2}=1.$$

$$\text{(b)}\ \int_0^1 xe^x dx=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-[e^x]_0^1=e-e+1=1.$$

$$\text{(c)}\ \int_0^{\pi/4}\tan x dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-[\log|\cos x|]_0^{\pi/4}=-[\log(\cos x)]_0^{\pi/4}=-\log\frac{\sqrt{2}}{2}+\log 0=\frac{\log 2}{2}.$$