Università degli studi di Trieste

Corso di Laurea magistrale a ciclo unico in Architettura
Istituzioni di Matematiche

14 Novembre 2014

Soluzione

Esercizio 1 – 2 punti. Dare le seguenti definizioni:

(a) Una successione a_n ha limite $+\infty$.
$\forall U \in \mathcal{I}_\infty\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \in U$ o equivalentemente $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n > M$.

(b) Una succesisone a_n ha limite $\ell \in \mathbb{R}$.
$\forall U \in \mathcal{I}_\ell\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \in U$ o equivalentemente $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Esercizio 2 – 1 punto. Dimostrare la seguente legge di De Morgan: $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$.

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Esercizio 3 – 2 punti. Siano dati i seguenti insiemi:
$A :=]-\infty, -5] \cup [-1, 2[\cup \{3\}$, $B := [-5, 0[\cup]1, 4]$, $C := [-5, 0] \cup [3, 4]$.
Tovare $D := A \cap C$; $E := B \setminus D$; $\mathring{D}$; $\overline{D}$, ∂D; $\mathring{E}$; $\overline{E}$, ∂E.
$D = \{-5\} \cup [-1, 0] \cup \{3\}$. $E =]-5, -1[\cup]1, 4] \setminus \{3\}$.
$\mathring{D} =]-1, 0[$; $\overline{D} = D$; $\partial D = \{-5, -1, 0, 3\}$.
$\mathring{E} =]-5, -1[\cup]1, 3[\cup]3, 4[$; $\overline{E} = [-5, -1] \cup [1, 4]$; $\partial E = \{-5, -1, 1, 3, 4\}$.

Esercizio 4 – 1 punto. Sia $F :=]-\infty, 3[$. Con riferimento all'esercizio precedente, trovare $G := E \cup F$; $\inf G$, $\sup G$. Dire se esistono, e in tal caso identificarli, $\min G$; $\max G$.
$D =]-\infty, 4]$; $\inf G = -\infty$, $\sup G = 4$, $\min G$ non esiste, $\max G = 4$.

Esercizio 5 – 3 punti. Sia $a_n := \dfrac{n^2+3}{n^2-1}$ e sia $A := \{a_n,\ n \geq 2\}$.
Trovare $\inf A$; $\sup A$. Dire se esistono, e in tal caso identificarli, $\min A$; $\max A$.
$\sup A = \max A = 7/3$, $\inf A = 1$, $\min A$ non esiste.
Sia poi $b_n := -na_n + \dfrac{a_n}{n}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Esercizio 6 – 3 punti. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}}$, [2] (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$, [log 2] (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$. [1]

Esercizio 7 – 3 punti. Usando la definizione di limite, mostrare che:

(a) $\dfrac{n^2+1}{3n-3} \to \infty$ per $n \to \infty$. Trovare $\bar{n}$ per $M = 42$. $[\bar{n} = [63 + \sqrt{3461}]]$.

(b) $\dfrac{n^2}{n^3+n-100} \to 0$ per $n \to \infty$. Trovare $\bar{n}$ per $\varepsilon = 1/100$. $[\bar{n} = 101]$.

Esercizio 8 – 4 punti. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}{1/n^2}; \ \left[\frac{\pi^2}{4}\right] \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1411}{n^2}\right)^{n^2}. \ [e^{1411}]$$

Esercizio 9 – 3 punti. Trovare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } f(x) = \cos\sqrt{x^2-5x+6}; \qquad \text{(b) } g(x) = \log\left(\frac{x^2-x-6}{x+1}\right).$$

(a) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$; (b) $\mathrm{dom}(g) =]-2, -1[\cup]3, +\infty[$.

Esercizio 10 – 3 punti. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0}(1+\cos(e^x))\sin\frac{1}{x}; \ \text{[non esiste]} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^27}; \ [0] \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0^+} x^{3\tan x} \ 1.$$

Esercizio 11 – 1 punto. Enunciare il teorema della permanenza del segno per successioni.

Esercizio 12 – 1 punto. Scrivere la definizione di funzione decrescente e strettamente decrescente.

Esercizio 13 – 1 punto. Trovare $a \in \mathbb{R}$ affinché risulti continua in zero la funzione definita da

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}, & x > 0, \\ -|x+a|, & x < 0. \end{cases} \qquad \left[a = \pm\frac{1}{2}\right]$$

Esercizio 14 – 3 punti. Vero o falso.

(a) La successione $\cos(n\pi)$ ha due limiti per $n \to \infty$, che sono $+1$ e -1. [F]

(b) Se una funzione non ha limite per $x \to 0$ allora non è limitata in un intorno dello zero. [F]

(c) Se $f(c) = \ell$, allora $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. [F]