Università degli studi di Trieste

Corso di Laurea magistrale a ciclo unico in Architettura
Istituzioni di Matematiche

14 Novembre 2014

Soluzione

Esercizio 1 – 2 punti. Dare le seguenti definizioni:

(a) Una successione a_n ha limite $-\infty$.
$\forall U \in \mathcal{I}_{-\infty}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \in U$ o equivalentemente $\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n < -M$.

(b) Una succesisone a_n ha limite $\ell \in \mathbb{R}$.
$\forall U \in \mathcal{I}_\ell\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \in U$ o equivalentemente $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Esercizio 2 – 1 punto. Dimostrare la seguente legge di De Morgan: $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Esercizio 3 – 2 punti. Siano dati i seguenti insiemi:
$A :=]-\infty, -5] \cup [-1, 2[\cup \{3\}$, $B := [-5, 0[\cup]1, 4]$, $C := [-5, 0] \cup [3, 4]$.
Tovare $D := A \cap B$; $E := C \setminus D$; $\mathring{D}$; $\overline{D}$, ∂D; $\mathring{E}$; $\overline{E}$, ∂E.
$D = \{-5\} \cup [-1, 0[\cup]1, 2[\cup \{3\}$. $E =]-5, -1[\cup \{0\} \cup]3, 4]$.
$\mathring{D} =]-1, 0[\cup]1, 2[$; $\overline{D} = \{-5\} \cup [-1, 0] \cup [1, 2] \cup \{3\}$; $\partial D = \{-5, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
$\mathring{E} =]-5, -1[\cup]3, 4[$; $\overline{E} = [-5, -1] \cup \{0\} \cup [3, 4]$; $\partial E = \{-5, -1, 0, 3, 4\}$.

Esercizio 4 – 1 punto. Sia $F :=]-1, +\infty[$. Con riferimento all'esercizio precedente, trovare $G := D \cup F$; $\inf G$, $\sup G$. Dire se esistono, e in tal caso identificarli, $\min G$; $\max G$.
$G = \{-5\} \cup [-1, +\infty[$; $\inf G = -5$, $\sup G = +\infty$, $\min G = -5$, $\max G$ non esiste.

Esercizio 5 – 3 punti. Sia $a_n := \dfrac{n(n+1)}{n-2}$ e sia $A := \{a_n,\ n \geq 3\}$.
Trovare $\inf A$; $\sup A$. Dire se esistono, e in tal caso identificarli, $\min A$; $\max A$.
$\inf A = \min A = 10$, $\sup A = +\infty$, $\max A$ non esiste.
Sia poi $b_n := \dfrac{2n}{n^2 - 1} a_n - \dfrac{a_n}{n}$. Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Esercizio 6 – 3 punti. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n}{8n+1}}\ \left[\frac{1}{2}\right]$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} [\log(7+n) - \log n]\ [0]$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}\ [1]$.

Esercizio 7 – 3 punti. Usando la definizione di limite, mostrare che:

(a) $\sqrt{n} - n \to -\infty$ per $n \to \infty$. Trovare $\bar{n}$ per $M = 42$. $[\bar{n} = 8]$.

(b) $\dfrac{3n^2 + \frac{11}{2}n - 5}{5n^2} \to \dfrac{3}{5}$ per $n \to \infty$. Trovare $\bar{n}$ per $\varepsilon = 1/10$. $[\bar{n} = 11]$.

Esercizio 8 – 4 punti. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4} \tan\left(\frac{3}{n^2}\right)\ \left[\frac{3}{4}\right]$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2014}{n}\right)^{n/2}\ [e^{1007}]$.

Esercizio 9 – 3 punti. Trovare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } f(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x-3}}\right); \qquad \text{(b) } g(x) = \log\left(\frac{x+5}{x-2}\right).$$

(a) $\mathrm{dom}(f) = [1,2] \cup]3,+\infty[$. (b) $\mathrm{dom}(g) =]-\infty,-5[\cup]2,+\infty[$.

Esercizio 10 – 3 punti. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a) } \lim_{x\to\pi/4} \frac{\sqrt{2x^2-1}}{\tan x} \left[\sqrt{\frac{\pi^2}{8}-1}\right]; \qquad \text{(b) } \lim_{x\to\infty} 2^x \left(\frac{x+5}{2x}\right)^x \ [e^5]; \qquad \text{(c) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2 e^x \log x)}{x} \ [0].$$

Esercizio 11 – 1 punto. Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Esercizio 12 – 1 punto. Scrivere la definizione di funzione continua.

Esercizio 13 – 1 punto. Trovare $a \in \mathbb{R}$ affinché risulti continua la funzione definita da

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \geq 0, \\ \dfrac{a}{x}(e^x - 1), & x < 0. \end{cases} \qquad [a = 1]$$

Esercizio 14 – 3 punti. Vero o falso.

(a) Se la successione a_n è infinitesima, allora $\lim_{n\to\infty} (1 - a_n) = 0$. [F]

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. [F]

(c) Se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$, allora $f(c) = \ell$. [F]