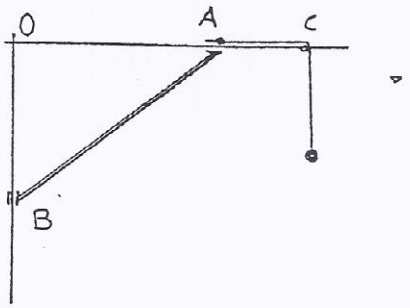
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

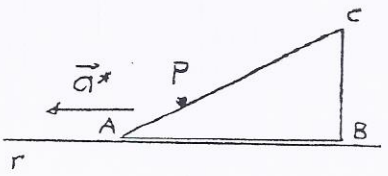
Corso di Laurea in Matematica - Prova scritta del 1.12.95

1. In un piano verticale π un'asta AB di massa m e lunghezza $2l$ ha gli estremi A e B vincolati a scorrere rispettivamente lungo una retta orizzontale x ed una retta verticale y incidenti in un punto O. L'estremo A è inoltre collegato tramile un filo flessibile e inestendibile di lunghezza L ad un punto materiale di massa uguale a quella dell'asta; a sua volta il filo passa su una carrucola puntiforme C posta sulla retta x a distanza d da O con $2l < d < L$. Si determinino, in corrispondenza alle posizioni di equilibrio del sistema , la tensione nel filo e le reazioni esercitate sull'asta nei punti A e B.

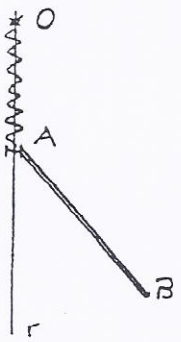


2. Un sistema di vettori applicati ha risultante $\vec{R} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e il suo momento risultante rispetto all'origine è $\vec{M}_O = -3\vec{i} - 9\vec{j} + \lambda\vec{k}$. Si determini per quali valori di λ il sistema è equivalente a un solo vettore applicato in un opportuno punto. In corrispondenza ai valori di cui sopra si determini l'unico vettore applicato equivalente al sistema dato.

3. In un piano verticale un triangolo rettangolo ABC di cateti $AB = 2h$ e $BC = h$ ha il lato AB vincolato a scorrere lungo una retta orizzontale r. Il triangolo si muove di moto traslatorio con accelerazione costante $\vec{a}^*$ in un intervalli di tempo $[0, t^*]$ assegnato dopodiché prosegue con moto uniforme. Un punto materiale (P, m) è vincolato a scorrere lungo l'ipotenusa AC; inizialmente si trova nel punto A con velocitá relativa nulla. Si dica a quali condizioni deve essere soggetta l'accelerazione $\vec{a}^*$ affinché nel moto conseguente P raggiunga il vertice C.



4. In un piano verticale un'asta AB di massa m e lunghezza $2l$ ha l'estremo A vincolato a scorrere lungo una retta verticale r. Lo stesso estremo è inoltre collegato, tramite una molla di costante elastica k, ad un punto O fisso della retta r. Si determinino le piccole oscillazioni del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio stabile.

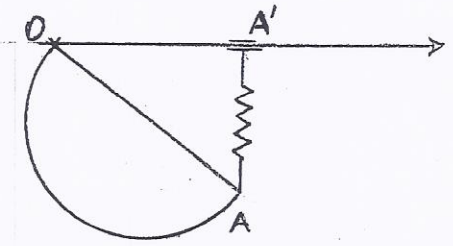


ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

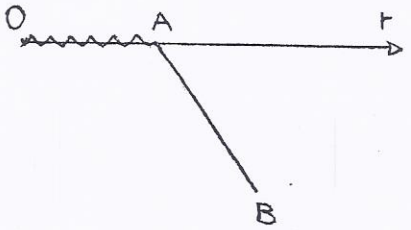
Corso di Laurea in Matematica

Prova Scritta del 19-4-2002

1. In un piano verticale π un semidisco omogeneo, di massa M e raggio R, ha l'estremo O, del diametro fissato in un punto di π, mentre l'altro estremo A, è collegato tramite una molla di costante elastica k, alla sua proiezione A', sull'orizzontale per O. Si determini il valore di k, affinchè la posizione in cui il semidisco risulta inclinato di $\frac{\pi}{4}$ sull'orizzontale sia di equilibrio.



2. In un piano verticale un'asta AB di massa m e lunghezza $2l$ ha l'estremo A vincolato a scorrere lungo una retta orizzontale r. Lo stesso estremo è inoltre collegato, tramite una molla di costante elastica k, ad un punto O fisso della retta r. Si determinino le piccole oscillazioni del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio stabile.



3. Un punto materiale (P, m) è vincolato a muoversi in un piano verticale ed è soggetto, oltre che al peso, ad una forza $\vec{f} = \alpha\vec{\omega} \times \vec{v}$,dove α è una costante scalare, $\vec{\omega}$ è un vettore costante perpendicolare al piano del moto e $\vec{v}$ è la velocità del punto. Il vincolo di appartenenza al piano non presenta attrito. Determinare la legge di moto e la traiettoria del punto P.

MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

Prova scritta del 27-6-2002

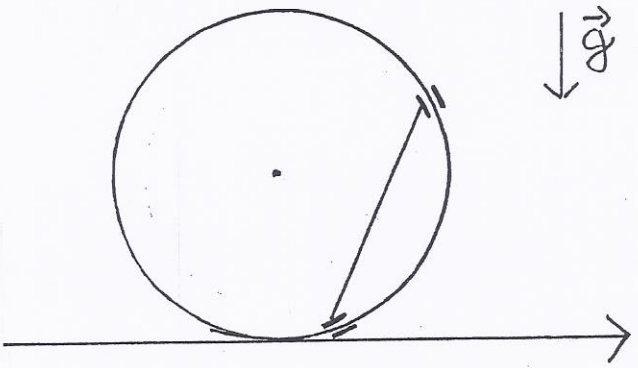
ESERCIZIO 1. In un piano verticale una circonferenza omogenea, di massa M e raggio R, rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un'asta omogenea, di massa m e lunghezza $l < 2R$, ha gli estremi vincolati a muoversi senza attrito sulla circonferenza.

a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano a questo sistema.

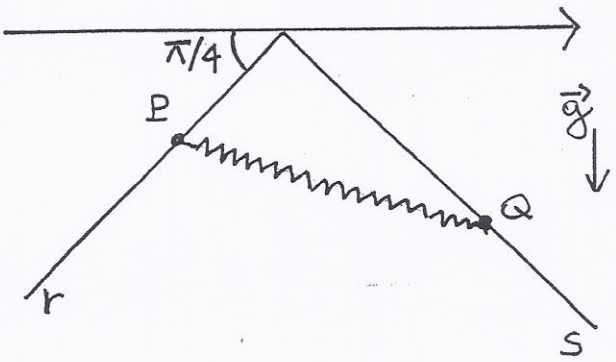
b) Scrivere la lagrangiana del sistema.

c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle fisicamente.

d) Scrivere le equazioni di moto.



ESERCIZIO 2. In un piano verticale, due punti materiali (P, m) e $(Q, 2m)$ sono vincolati a muoversi lungo due guide lisce r e s, ortogonali tra loro e inclinate di $\pi/4$ sull'orizzontale. I due punti sono inoltre collegati tramite una molla di costante elastica $3k > 0$.
Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni del sistema in un intorno della posizione di equilibrio stabile.



ESERCIZIO 3. Mostrare che la trasformazione tra coordinate e momenti

$$\begin{aligned} Q &= -p \\ P &= q + Ap^2, \end{aligned}$$

dove A è una costante arbitraria $\neq 0$, è canonica. Trovare inoltre la funzione generatrice di tipo $F_1 = F_1(q, Q)$.

(Facoltativo) Data la hamiltoniana (particella di massa m in un campo gravitazionale uniforme g)

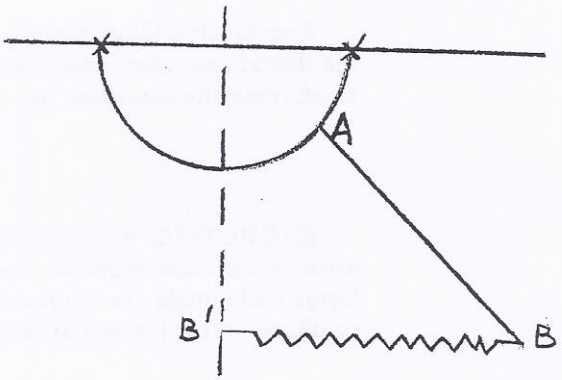
$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

trovare l'espressione della nuova hamiltoniana $K = K(Q, P)$. Determinare inoltre per quale valore della costante A la nuova hamiltoniana risulta ciclica e risolvere le relative equazioni di Hamilton.

MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

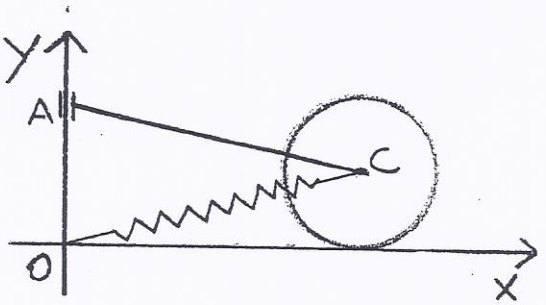
Prova scritta del 16-7-2002

ESERCIZIO 1. In un piano verticale una semicirconferenza di raggio R ha gli estremi fissati ad un asse orizzontale. Un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $2l$, ha l'estremo A vincolato a muoversi senza attrito sulla semicirconferenza. Sull'estremo B agisce inoltre una forza elastica di costante $k > 0$ in modo tale che il segmento BB' si mantiene sempre parallelo all' asse orizzontale.



a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano per lo studio del moto dell' asta.
b) Scrivere la lagrangiana del sistema.
c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle fisicamente.
c') Analizzare la natura delle coordinate lagrangiane scelte. Più precisamente, ci sono tra esse coordinate di rotazione?
d) Scrivere le equazioni di moto.

ESERCIZIO 2. In un piano verticale Oxy, con y verticale ascendente, un disco di massa m e raggio R, rotola senza strisciare sull'asse x. Un'asta CA, di massa $2m$ e lunghezza l, ha l'estremo A vincolato a scorrere sull'asse y e l'estremo C incernierato nel centro del disco. C è inoltre collegato tramite una molla di costante elastica $k > 0$, all'origine O del riferimento Oxy. I vincoli sono privi di attrito. Si determinino le posizioni di equilibrio stabile e si studino le piccole oscillazioni attorno a una di esse.



ESERCIZIO 3. Mostrare che la trasformazione tra coordinate e momenti

$$\begin{aligned} Q &= q\cos\theta - \tfrac{p}{m\omega}\sin\theta \\ P &= m\omega q\sin\theta + p\cos\theta, \end{aligned}$$

dove θ è un parametro angolare arbitrario, è canonica.
Data la hamiltoniana dell' oscillatore armonico nelle variabili (q, p)

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, q^2,$$

trovare l'espressione della nuova hamiltoniana $K = K(Q,P)$.

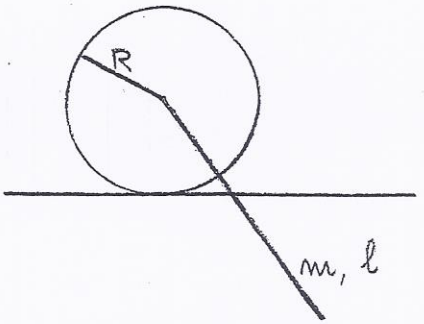
Facoltativo Giustificare il fatto che le due hamiltoniane hanno la stessa forma dando una interpretazione geometrica nello spazio delle fasi $(q, p/m\omega)$ della trasformazione canonica data sopra.

ESERCIZIO 4. Una guida piana ruota con velocità angolare ω costante attorno a un asse verticale, appartenente al piano della guida. Determinare la forma della guida che consente a un anello, scorrevole su di essa, di trovarsi in equilibrio in ogni punto della guida stessa.

MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

Prova scritta del 23-09-2002

ESERCIZIO 1. In un piano verticale un disco omogeneo di raggio R e massa M rotola senza strisciare lungo un asse orizzontale. Un'asta omogenea, di massa m e lunghezza $l > 2R$, ha un estremo vincolato al centro del disco e può oscillare nel piano.



a) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
b) Scrivere la lagrangiana del sistema.
c) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.
d) Determinare se, tra tutti i moti possibili del sistema, è ammissibile un moto nel corso del quale l'angolo formato dall'asta con la verticale rimanga costante.

ESERCIZIO 2. Un punto materiale (P, m) si muove su una retta orizzontale sotto l'azione di forza conservative di energia potenziale $V(x) = mkx^2(2 - x^2)$, dove $k > 0$ è una costante.
a) Determinare le posizioni di equilibrio stabile. b) Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio stabile.

ESERCIZIO 3. Mostrare che la trasformazione tra coordinate e momenti

$$\begin{aligned} Q_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(q_1 + \tfrac{p_2}{m\omega}\right); \quad Q_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(q_1 - \tfrac{p_2}{m\omega}\right); \\ P_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(p_1 - m\omega q_2\right); \quad P_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(p_1 + m\omega q_2\right) \end{aligned}$$

è canonica.

ESERCIZIO 4. Tre punti materiali di uguale massa m sono posti ai vertici di un triangolo di area fissata A. È possibile scegliere il triangolo in modo che l'ellissoide centrale d'inerzia del sistema di punti sia una sfera?

$$[Q_1, P_1] = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}m\omega}\cdot\frac{-m\omega}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$[Q_1, P_2] = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}m\omega}\frac{m\omega}{\sqrt{2}} = 0$$

$$[Q_2, P_1] = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}m\omega}\left(-\frac{m\omega}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

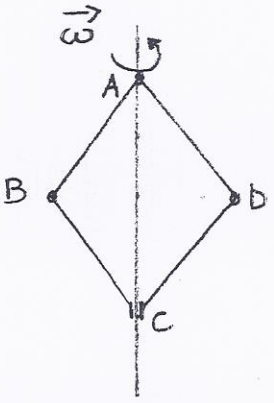
$$[Q_2, P_2] = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{m\omega}{\sqrt{2}} = 1$$

ok

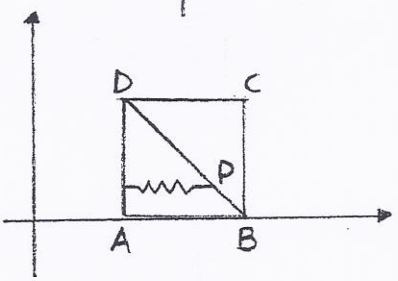
MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*

Prova scritta del 29-11-2002

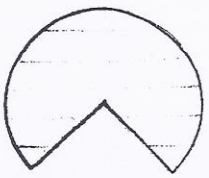
ESERCIZIO 1. Un punto materiale (P, m) si muove in un sistema inerziale unicamente sotto l'azione di una forza conservativa di potenziale $U(x, y, z)$. Mostrare che i moti uniformi di P sono tutti quelli per cui la traiettoria di P è una curva contenuta in una superficie equipotenziale (cioè in una superficie di equazione $U(x, y, z) = cost$ con k costante arbitraria).



ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema piano articolato formato da quattro sbarre rigide rettilinee omogenee e pesanti di uguale lunghezza l ed uguale massa m, collegate fra loro a cerniera nei rispettivi estremi. La cerniera in A è fissa, quella in C è vincolata a scorrere sulla verticale per A. Il piano π a cui appartiene il quadrilatero ruota attorno alla verticale per A con velocità angolare $\vec{\omega}$ assegnata. Determinare le posizioni di equilibrio del quadrilatero in un riferimento solidale al piano π.



ESERCIZIO 3. In un piano verticale, una lamina quadrata $ABCD$ omogenea, di lato L e massa M, ha il lato AB scorrevole su una guida orizzontale. Un punto P, di massa m è vincolato a scorrere lungo la diagonale DB del quadrato ed è attratto con forza elastica di costante $k > 0$ dalla sua proiezione sul lato AD della lamina. I vincoli sono privi di attrito. Sapendo che all'istante iniziale l'atto di moto del sistema è nullo e P coincide con D, calcolare il tempo impiegato da P per raggiungere B. Individuare gli integrali primi di moto.

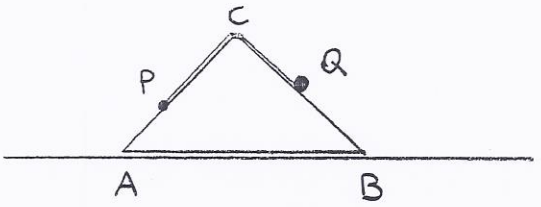


ESERCIZIO 4. Si consideri una lamina omogenea di massa m ottenuta eliminando uno spicchio pari a un quarto da un disco di raggio R. Determinare i momenti principali d'inerzia relativi al centro C.

MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

Prova scritta del 17-1-2003

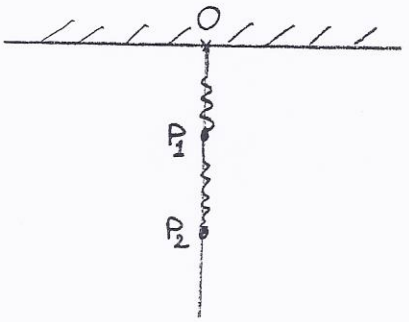
ESERCIZIO 1. Una lamina di massa M, posta in un piano verticale, ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti di lunghezza l. L'ipotenusa AB si muove senza attrito lungo un asse orizzontale. Due punti materiali P di massa m e Q di massa $2m$ si muovono senza attrito lungo i due cateti AC e CB e sono collegati da un filo inestendibile di lunghezza l.



(a)(T) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
(b)(T-Q) Scrivere la lagrangiana del sistema.
(c)(T-Q) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.
(d)(T-Q) Scrivere le equazioni di moto e trovarne la soluzione generale.

(T: triennale; Q: quadriennale)

ESERCIZIO 2. Una molla, di costante elastica k, ha un estremo in un punto fisso O e sostiene, all'altro estremo, un punto materiale P_1 di massa m. Una molla, anch'essa di costante elastica k, collega il punto materiale P_1 a un punto materiale P_2 di massa m. I due punti P_1, P_2 sono vincolati a muoversi lungo la verticale passante per O. Si determinino:



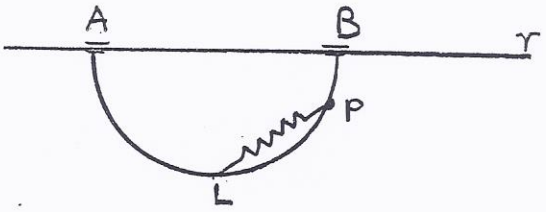
(a) la configurazione di equilibrio stabile;
(b) le frequenze proprie;
(c) i modi normali.

ESERCIZIO 3. Valutare l'insieme delle parentesi di Poisson tra una componente del raggio vettore
$\vec{r} = (x, y, z)$
e una componente del momento angolare
$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$.

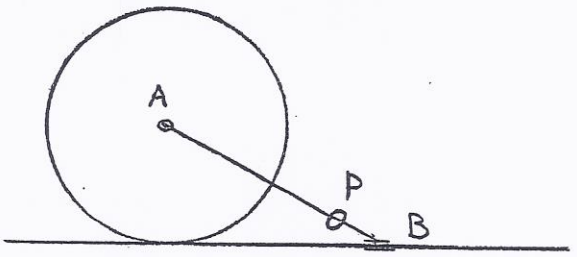
MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

Prova scritta del 24-2-2003

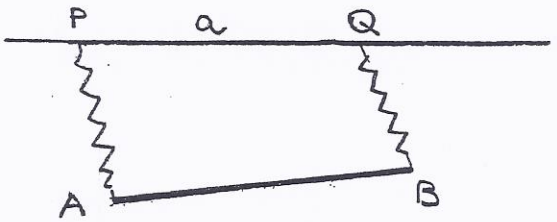
ESERCIZIO 1. In un piano verticale una guida semicircolare di raggio R e massa M ha gli estremi A e B vincolati a scorrere lungo una retta orizzontale fissa r. Un punto materiale (P, m) è vincolato a scorrere sulla guida ed è collegato, tramite una molla di costante elastica k, al suo punto più basso L. I vincoli sono privi di attrito. Inizialmente il sistema è in quiete e P coincide con B.
Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
Scrivere la lagrangiana del sistema.
Determinare eventuali integrali primi di moto.



ESERCIZIO 2. In un piano verticale un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una guida orizzontale fissa. Un'asta omogenea, di massa M e lunghezza $2R$, ha l'estremo A incernierato nel centro del disco e l'estremo B scorrevole sulla guida. Il moto dell'asta AB è pertanto traslatorio. Sull'asta è inoltre scorrevole un anellino P di massa $\frac{M}{2}$ I vincoli sono privi di attrito. All'istante iniziale il sistema è in quiete con l'anellino in A. Scrivere le equazioni di moto del sistema e trovarne la soluzione generale.



ESERCIZIO 3. In un piano verticale un'asta AB di lunghezza $2l$ e massa m ha gli estremi A e B collegati tramite due molle di uguale costante elastica K a due punti P e Q fissi nel piano alla stessa quota e distanti a uno dall'altro. Determinare le piccole oscillazioni del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio stabile.



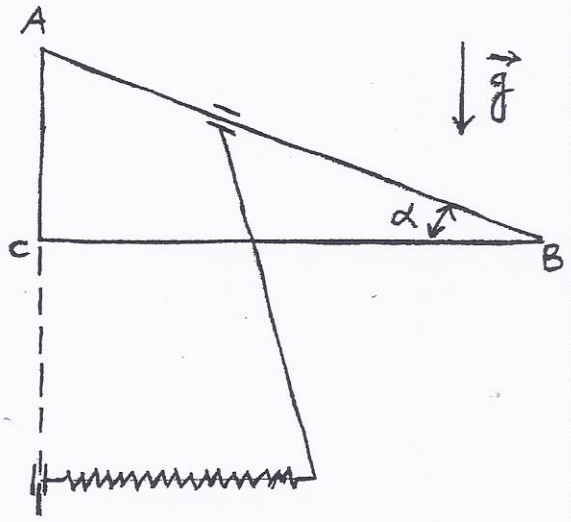
ESERCIZIO 4. Sia $L = \frac{1}{2}[A(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}^2] - mgd\cos\theta$ la lagrangiana di un sistema a grado di libertà 3 nelle coordinate lagrangiane θ, ϕ, ψ. Ricavare le equazioni canoniche di Hamilton per il sistema in oggetto.

MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

Prova scritta del 24-6-2003

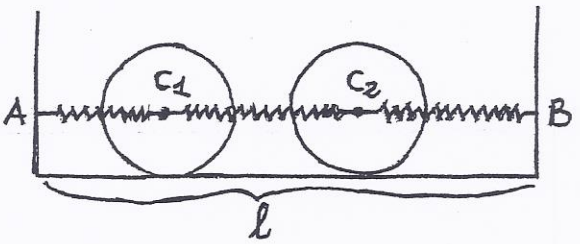
ESERCIZIO 1. In un piano verticale un'asta rigida omogenea, di lunghezza l e massa m, si muove con un estremo vincolato a scorrere senza attrito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC. Il secondo estremo dell'asta è attratto da una forza elastica di costante $k > 0$ diretta ortogonalmente all'asse verticale.
(a)(T) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
(b)(T-Q) Scrivere la lagrangiana del sistema.
(c)(T-Q) Individuare la natura (traslazione-rotazione) delle coordinate lagrangiane scelte.
(d)(T-Q) Determinare eventuali costanti di moto e interpretarle da un punto di vista fisico.

(T: triennale; Q: quadriennale)



T-Q

ESERCIZIO 2. Due dischi omogenei uguali, di massa m e raggio R, rotolano senza strisciare lungo una guida orizzontale. I centri dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k. Due ulteriori molle, sempre di costante elsatica k, collegano i centri C_1 e C_2 dei due dischi alle rispettive proiezioni A e B sulle pareti verticali (tra loro distanti l). Si determinino:
(a) l'eventuale configurazione di equilibrio stabile;
(b) le frequenze proprie;
(c) (facoltativo) i modi normali.



T

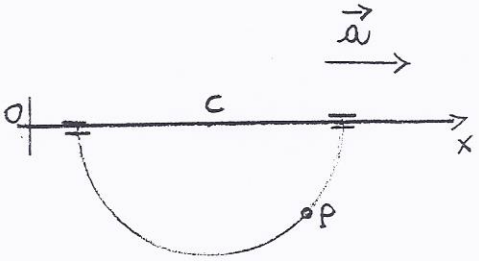
ESERCIZIO 3. Valutare l'insieme delle parentesi di Poisson tra una componente del raggio vettore
$\vec{r} = (x, y, z)$
e una componente del momento angolare
$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$.

MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

Prova scritta del 28-11-2003

(**T**: triennale; **Q**: quadriennale)

ESERCIZIO 1. In un piano verticale una semicirconferenza C di raggio R ha gli estremi vincolati a scorrere su una guida orizzontale orientata con una accelerazione $\mathbf{a} = a\,\mathbf{i}$ (a costante positiva).
Un punto materiale P di massa m si muove senza attrito sulla semicirconferenza.



T: **(a)** Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano.
T: **(b)** Scrivere la lagrangiana del punto P in un sistema di riferimento inerziale supponendo che all'istante $t = 0$ il centro di C si trovi nell'origine e che la sua velocità sia nulla.
T: **(c)** Individuare eventuali costanti di moto.

Q: **(a')** Scrivere la lagrangiana del punto P in un sistema di riferimento solidale con la semicirconferenza.
Q: **(b')** L'energia di P si conserva?

ESERCIZIO 2 (T e Q). Un'asta omogenea di massa M e lunghezza l ha un estremo vincolato ad un punto fisso O e può oscillare in un piano verticale. Un punto materiale P di massa m si muove senza attrito sull' asta ed è attratto verso il punto O da una forza elastica di costante $k > 0$.

Si determinino:
(a) l'eventuale configurazione di equilibrio stabile;
(b) le frequenze proprie;
(c) (facoltativo) i modi normali.

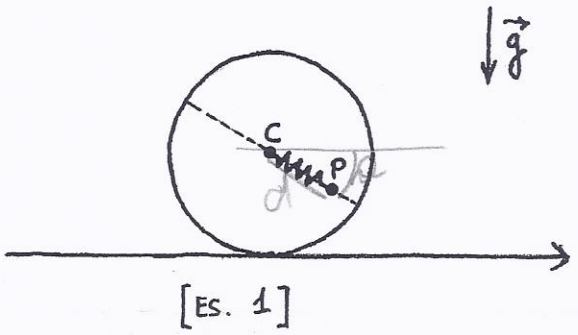
ESERCIZIO 3 (T). Valutare l'insieme delle parentesi di Poisson tra una componente del raggio vettore
$\vec{r} = (x, y, z)$
e una componente del momento angolare
$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$.

MECCANICA RAZIONALE *(Corso di Laurea in Matematica)*
MECCANICA ANALITICA *(Laurea Triennale in Matematica)*

Prova scritta del 24-06-2004

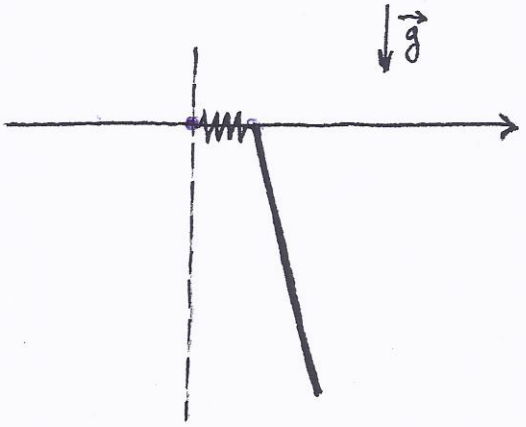
(**T**: triennale; **Q**: quadriennale)

ESERCIZIO 1. Un disco omogeneo di raggio R e massa M posto in un piano verticale rotola senza strisciare su una retta orizzontale. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito lungo un diametro ed è attratto verso il centro del disco da una forza elastica di costante $k > 0$.
a) (T-Q) Verificare l'applicabilità del formalismo lagrangiano e scrivere la lagrangiana del sistema. Individuare eventuali integrali primi del moto.
b) (T) Determinare la natura di ciascuna delle coordinate lagrangiane scelte (coord. di rotazione, traslazione o nessuna delle due).
c) (T-Q) facoltativo A partire dalla lagrangiana L scritta nel punto (1), considerare il caso particolare in cui il disco è costantemente in quiete con il punto di contatto posto nell'origine degli assi coordinati. Dalla lagrangiana L' così ottenuta scrivere l'equazione del moto per il punto P e trovarne la soluzione generale.



[ES. 1]

ESERCIZIO 2 (T). In un piano verticale, una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m ha un estremo vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida orizzontale. L'estremo vincolato della sbarretta subisce una forza elastica ($k > 0$) di richiamo verso un punto fissato della guida. Derivare la matrice $\lambda\mathbb{T} - \mathbb{V}$, scrivere l'espressione dei valori di λ per cui il suo determinante si annulla, discutere il segno di tali valori e darne l'interpretazione fisica.


[ES. 2]

ESERCIZIO 3 (T). Data la trasformazione

$$Q = 2a \log p + \log q$$
$$P = -p^b q \log q \,,$$

trovare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ è canonica.